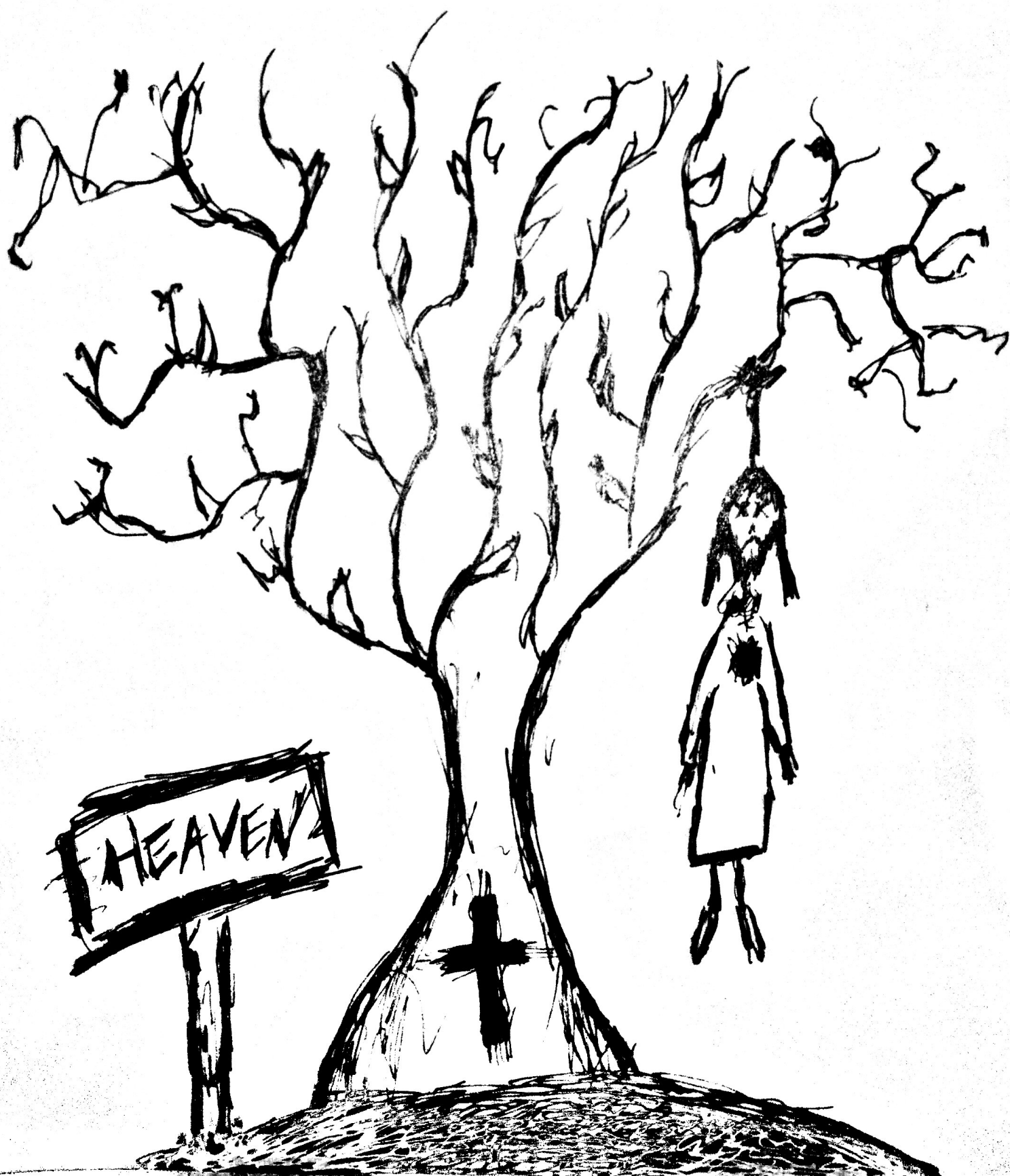


CALCULUS

A LLANGANATE



Operaciones Elementales

Sean f y g dos funciones derivables en sus respectivos dominios demostrar las siguientes propiedades.

$$\bullet (f(x) + g(x))'(x) = f'(x) + g'(x)$$

Por definición $C'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{C(x + \Delta x) - C(x)}{\Delta x}$ se dice

que $C(x)$ es derivable entonces:

$$(f(x) + g(x))'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(f+g)(x + \Delta x) - (f+g)(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x) - f(x) - g(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right)$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

$$\therefore (f(x) + g(x))'(x) = f'(x) + g'(x) //$$

$$\bullet (f(x) - g(x))'(x) = f'(x) - g'(x)$$

$$(f(x) - g(x))'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(f-g)(x + \Delta x) - (f-g)(x)}{\Delta x}$$

$$(f(x) - g(x))'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x) - g(x + \Delta x) + g(x)}{\Delta x}$$

$$(f(x) - g(x))'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} - \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right)$$

$$(f(x) - g(x))'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

$$\therefore (f(x) - g(x))'(x) = f'(x) - g'(x) //$$

$$\bullet (f(x) \cdot g(x))'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$(f(x) \cdot g(x))'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(f \cdot g)(x + \Delta x) - (f \cdot g)(x)}{\Delta x}$$

$$(f(x) \cdot g(x))'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} + \frac{f(x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x + \Delta x)}{\Delta x} \right)$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x + \Delta x) + f(x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} g(x + \Delta x) \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x) \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

Resolviendo los dos límites se obtiene que:

$$\therefore (f(x) \cdot g(x))'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) //$$

$$\bullet \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

- Se demuestra utilizando la definición de derivada

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x) \cdot g(x) \cdot \Delta x} \right) \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x) - f(x)g(x+\Delta x) + f(x)g(x)}{g(x+\Delta x) \cdot g(x) \cdot \Delta x} \right) \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x) - (f(x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x))}{\Delta x} \right) \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{[g(x+\Delta x) \cdot g(x)] / 1}{\Delta x} \cdot \frac{1}{g(x+\Delta x) \cdot g(x)} \right) \end{aligned}$$

Resolviendo el límite se obtiene que:

$$\bullet \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} //$$

• Función Compuesta (Regla de la cadena)

Sean f y g dos funciones derivables en sus respectivos dominio entonces existe la compuesta $g \circ f = f \circ g$, es decir,

$$\exists f'(x), \exists g'(x), \exists g'(f(x))$$

La derivada de una función compuesta es entonces

$$\exists (g \circ f)'(x) = (g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

- Notación del Ing. Villota para la derivada de una función compuesta:

$$(g \circ f)'(x) = (g(f(x)))'(f(x)) \cdot (f(x))'(x)$$

Para $f \circ g$ distinto que $g \circ f$ se cumple lo mismo:

$$(f \circ g)'(x) = (f(g(x)))'(g(x)) \cdot (g(x))'(x)$$

Pese a cualquier notación es importante respetar la estructura de aplicación que se demostrará a continuación.

- Demostración de la derivada de la función compuesta a través de la definición de derivada.

$$(g \circ f)'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(g \circ f)(x + \Delta x) - (g \circ f)(x)}{\Delta x}$$

$$(g \circ f)'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(f(x + \Delta x)) - g(f(x))}{\Delta x}$$

$$(g \circ f)'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{g(f(x + \Delta x)) - g(f(x))}{\Delta x} \cdot \frac{f'(x)}{f'(x)} \right)$$

$$(g \circ f)'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{g(f(x + \Delta x)) - g(f(x))}{\Delta x} \cdot \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}} \right)$$

$$(g \circ f)'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [g(f(x + \Delta x)) - g(f(x))] \cdot \left[\frac{\Delta x}{f(x + \Delta x) - f(x)} \right]$$

$$(g \circ f)'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(f(x + \Delta x)) - g(f(x))}{f(x + \Delta x) - f(x)} \cdot \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$(g \circ f)'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(f(x + \Delta x)) - g(f(x))}{f(x + \Delta x) - f(x)} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$(g \circ f)'(x) = \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(f(x + \Delta x)) - g(f(x))}{f(x + \Delta x) - f(x)} \right) \cdot f'(x)$$

Cambio de variable

$$\begin{aligned} h &= f(x + \Delta x) - f(x) \\ \therefore f(x + \Delta x) &= f(x) + h \end{aligned} \quad \begin{cases} \Delta x \rightarrow 0 \\ h \rightarrow 0 \end{cases}$$

$$(g \circ f)'(x) = \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(f(x) + h) - g(f(x))}{h} \right) \cdot f'(x)$$

$$\therefore (g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

■ Teorema de la derivada de la Función Inversa

sea $F: A \rightarrow B$, una función biyectiva entonces:

$\forall x \in A, \forall y \in B, y = f(x)$ ssi $x = f^{-1}(y)$ se demuestra que:

$$\begin{aligned} y &= f(x) \\ (y)'(y) &= (f(x))'(y) \end{aligned}$$

$$1 = (f(x))'(x) \cdot (x)'(y)$$

$$\text{como } (x)'(y) = (f^{-1}(y))'(y) \Rightarrow (f^{-1}(y))'(y) = \frac{1}{(f(x))'(x)}$$

$$\therefore (f^{-1}(y))'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{y'(x)}$$

Con este teorema es posible encontrar las funciones inversas de las funciones trigonométricas.

Reglas de derivación (demostraciones)

■ Derivada de una constante

Sea $f(x) = c$ una función derivable en su dominio entonces la derivada de una función constante es:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{c - c}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 0$$

$$\therefore f'(x) = 0 //$$

■ Derivada de la función identidad

Sea $f(x) = x$ una función derivable en su dominio entonces la derivada de la función identidad es:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 1$$

$$\therefore f'(x) = 1 //$$

■ Derivada de la función potencia

Sea $f(x) = x^n$ una función derivable en su dominio entonces la derivada de la función potencia es:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (\text{por definición}) ; h = \Delta x$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x+\Delta x)^n - (x)^n}{\Delta x}, \quad n \in \mathbb{Z}^+$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x+\Delta x) - x}{\Delta x} \cdot [(x+\Delta x)^{n-1} + (x+\Delta x)^{n-2}x + \dots + (x+\Delta x)x^{n-2} + x^{n-1}]$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (x+\Delta x)^{n-1} + (x+\Delta x)^{n-2}x + \dots + (x+\Delta x)x^{n-2} + x^{n-1}$$

$$f'(x) = x^{n-1} + x^{n-1} + x^{n-1} \dots + x^{n-1} + x^{n-1}$$

$$\therefore f'(x) = n \cdot x^{n-1} // \quad n \in \mathbb{R}$$

■ Derivada del producto de una función por un escalar

Sea $y = k \cdot f(x)$ entonces su derivada es:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{k(f(x+\Delta x)) - k \cdot f(x)}{\Delta x} = k \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = k \cdot f'(x) //$$

■ Derivada de e^x

Por otra definición de derivado se tiene que:

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Siendo $f(x) = e^x$ una función derivable en su dominio:

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{e^x - e^a}{x - a}$$

Si aplicamos cambio de variable

$$\begin{cases} h = x - a & \begin{cases} x \rightarrow a \\ h \rightarrow 0 \end{cases} \\ x = h + a \end{cases}$$

Volvemos a la definición utilizada anteriormente cuando a es $x_1, x_2, \dots, x_n$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^x (e^h - 1)}{h}$$

Aplicamos cambio de variable en $e^h - 1$

$$z = e^h - 1$$

$$e^h = z + 1$$

$$h \ln e = \ln(z + 1)$$

$$h = \ln(z + 1)$$

$$\Rightarrow f'(x) = e^x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{z}{\ln(z + 1)} = e^x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{z}{\ln(z + 1)}$$

$$= e^x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(z + 1)^{1/2}} = e^x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\ln e} = e^x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} 1$$

$$\therefore f'(x) = (e^x)'(x) = e^x$$

- La derivada de e^{-x} se demuestra utilizando la propiedad de derivación de un cociente.

$$(e^{-x})'(x) = \left(\frac{1}{e^x} \right)'(x) = \frac{(1)'(e^x) - (1)(e^x)'}{(e^x)^2}$$

$$(e^{-x})'(x) = \frac{-e^x}{(e^x)(e^x)} = \frac{-1}{(e^x)}$$

$$\therefore (e^{-x})'(x) = -e^{-x}$$

■ Derivada de la función exponencial a^x

Sea $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$ y $x \in \mathbb{R}$ una función derivable en su dominio, la derivada de $f(x)$ es:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^x (a^h - 1)}{h}$$

h puede llamarse Δx :

$$f'(x) = a^x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x}$$

Aplicamos un cambio de variable

$$\begin{aligned} z &= a^{\Delta x} - 1 \quad \begin{cases} \Delta x \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0 \end{cases} \\ \ln(z+1) &= \Delta x \cdot \ln a \\ \Delta x &= \frac{\ln(z+1)}{\ln a} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f'(x) = a^x \cdot \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\frac{\ln(z+1)}{\ln a}} = a^x \cdot \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\ln a}{\frac{1}{z} (\ln(z+1))}$$

$$f'(x) = a^x \cdot \ln a \cdot \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(z+1)^{\frac{1}{z}}} = a^x \cdot \ln a \cdot \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{\ln e}$$

$$f'(x) = a^x \cdot \ln a \cdot \lim_{z \rightarrow 0} 1$$

$$\therefore f'(x) = (a^x)'(x) = a^x \cdot \ln a //$$

■ Derivada de la función logarítmica $\log_a(x)$

Sea $f(x) = \log_a(x)$, $a \neq 1$, $a > 0$, $x > 0$, su derivada es:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log_a(x + \Delta x) - \log_a(x)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \cdot \log_a\left(\frac{x + \Delta x}{x}\right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \log_a\left(\frac{x}{x} + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}$$

$$f'(x) = \log_a \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{\frac{x}{\Delta x}}\right)^{\frac{1}{\Delta x} \cdot \frac{x}{x}} = \log_a e^{\frac{1}{x}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \log_a(e) = \frac{1}{x} \cdot \frac{\log_e(e)}{\log_e(a)} = \frac{1}{x \log_e(a)}$$

como $\log_e$ es $\ln$ entonces

$$\therefore f'(x) = (\log_a x)'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}$$

De esta manera la derivada de $F(x) = \ln x = \log_e x$ donde $a = e$ será

$$F'(x) = (\ln x)'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(e)} = \frac{1}{x} //$$

Derivadas de las funciones

Trigonométricas

■ Derivado del $\sin(x)$

Sea $y = F(x) = \sin(x)$ una función derivable en su dominio y , su derivada es:

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin(x)}{\Delta x}$$

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) \cdot \cos(\Delta x) + \sin(\Delta x) \cdot \cos(x) - \sin(x)}{\Delta x}$$

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) (\cos(\Delta x) - 1) + \sin(\Delta x) \cos(x)}{\Delta x}$$

$$\text{Como el } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos(\Delta x) - 1}{\Delta x} \right) = 0 \text{ y el } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x} \right) = 1$$

$$\therefore F'(x) = +\cos(x) = \cos(x) //$$

■ Derivada del $\cos(x)$

Sea $y = F(x) = \cos(x)$ una función derivable en su dominio y , su derivada es:

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) \cos(\Delta x) - \sin(x) \sin(\Delta x) - \cos(x)}{\Delta x}$$

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) (\cos(\Delta x) - 1) - \sin(x) \sin(\Delta x)}{\Delta x}$$

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) (\cos(\Delta x) - 1)}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) \sin(\Delta x)}{\Delta x}$$

$$F'(x) = (\cos(x))'(x) = -\sin(x) //$$

■ Derivada de la $\tan(x)$

Sea $y = F(x) = \tan(x)$ una función derivable en su dominio y , su derivada es:

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\tan(x + \Delta x) - \tan(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\left(\frac{\sin(x + \Delta x)}{\cos(x + \Delta x)} \right) - \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)} \right) \right] \cdot \frac{1}{\Delta x}$$

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x)}{\cos(x + \Delta x)} - \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \cdot \frac{1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) \cos(x) - \sin(x) \cos(x + \Delta x)}{\Delta x \cos(x + \Delta x) \cos(x)}$$

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) [\sin(x) \cos(\Delta x) + \sin(\Delta x) \cos(x)] - \sin(x) [\cos(x) \cos(\Delta x) - \sin(x) \sin(\Delta x)]}{\Delta x \cos(x + \Delta x) \cos(x)}$$

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) \cos(\Delta x) \cos(x) + \sin(\Delta x) \cos^2(x) - \sin(x) \cos(\Delta x) \cos(x) + \sin^2(x) \sin(\Delta x)}{\Delta x \cos(x + \Delta x) \cos(x)} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos(x + \Delta x) - \cos(x)}$$

$$F'(x) = \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(x) \cos(\Delta x) \cos(x) + \sin(\Delta x) \cos^2(x) - \sin(x) \cos(x) \cos(\Delta x) + \sin^2(x) \sin(\Delta x)}{\Delta x} \right) \right) \cdot \frac{1}{\cos^2(x)}$$

$$F'(x) = \frac{0 + \cos^2(x)(1) - 0 + \sin^2(x)(1)}{\cos^2(x)} = F'(x) = \frac{\sin^2(x) + \cos^2(x)}{\cos^2(x)}$$

Como $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ por identidad pitagórica

$$\therefore F'(x) = (\tan(x))'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = \sec^2(x) //$$

■ Derivada de la $\sec(x)$

Sea $y = F(x) = \sec(x)$ una función derivable en su dominio "y", su derivada es:

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sec(x + \Delta x) - \sec(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{1}{\cos(x + \Delta x)}}{\Delta x} - \frac{1}{\cos(x)} \right)$$

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - \cos(x + \Delta x)}{\cos(x) \cos(x + \Delta x) \Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - \cos(x) \cos(\Delta x) + \sin(x) \sin(\Delta x)}{\cos(x) \cdot \Delta x \cdot \cos(x + \Delta x)}$$

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{-\cos(x)(\cos(\Delta x) - 1) + \sin(x) \sin(\Delta x)}{\Delta x} \right) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos(x) \cos(x + \Delta x)}$$

$$F'(x) = (0 + \sin(x)) \cdot \frac{1}{\cos^2(x)} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \cdot \frac{1}{\cos(x)}$$

$$\therefore F'(x) = (\sec(x))'(x) = \tan(x) \cdot \sec(x) //$$

■ Derivada de la $\csc(x)$; $F(x) = \csc(x)$

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\csc(x + \Delta x) - \csc(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{1}{\sin(x + \Delta x)}}{\Delta x} - \frac{1}{\sin(x)} \right)$$

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - \sin(x + \Delta x)}{\sin(x + \Delta x) \sin(x) \Delta x}$$

$$F'(x) = \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - [\sin(x) \cos(\Delta x) + \sin(\Delta x) \cos(x)]}{\Delta x} \right) \cdot \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin(x + \Delta x) \sin(x)} \right)$$

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{-\sin(x)(\cos(\Delta x) - 1) - \sin(\Delta x) \cos(x)}{\Delta x} \right) \cdot \frac{1}{\sin^2(x)}$$

$$F'(x) = (0 - \cos(x)) \cdot \frac{1}{\sin^2(x)} = -\frac{\cos(x)}{\sin(x)} \cdot \frac{1}{\sin(x)}$$

$$\therefore F'(x) = -\cot(x) \cdot \csc(x) //$$

■ Derivada de la $\cotg(x)$

Sea $y = F(x) = \cotg(x)$ una función derivable en su dominio "y", su derivada es:

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cotg(x + \Delta x) - \cotg(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{\cos(x + \Delta x)}{\sin(x + \Delta x)}}{\Delta x} - \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \right)$$

$$2 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos(x + \Delta x) \sin(x) - \cos(x) \sin(x + \Delta x)}{\Delta x \cdot \sin(x) \cdot \sin(x + \Delta x)}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) \cos(\Delta x) \sin(x) - \sin^2(x) \sin(\Delta x) - \sin(x) \cos(\Delta x) \cos(x) - \sin(\Delta x) \cos^2(x)}{\Delta x \cdot \sin(x) \cdot \sin(x + \Delta x)}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{-\sin^2(x) \sin(\Delta x)}{\Delta x} - \frac{\sin(\Delta x) \cos^2(x)}{\Delta x} \right) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin(x) \sin(x + \Delta x)}$$

Como el $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x} = 1$ entonces,

$$f'(x) = (-\sin^2(x) - \cos^2(x)) \cdot \left(\frac{1}{\sin(x) \sin(x)} \right) = (-1) \cdot \frac{1}{\sin^2(x)}$$

$$\therefore f'(x) = (\operatorname{ctg}(x))'(x) = -\operatorname{csc}^2(x) //$$

Derivadas de las funciones Hiperbólicas

■ Derivada del $\sinh(x)$

Como el $\sinh = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ entonces su derivada es:

$$(\sinh(x))'(x) = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)'(x) = \left(\frac{e^x}{2} \right)' - \left(\frac{e^{-x}}{2} \right)'$$

Como la derivada de $(e^x)'(x) = e^x$ y $(e^{-x})'(x) = -e^x$

Demostración $\rightarrow (e^{-x})'(x) = -e^{-x}$

$$(e^{-x})'(x) = \left(\frac{1}{e^x} \right)'(x) = \frac{(1)'(e^x) - (1)(e^x)'}{(e^x)^2} = \frac{-e^x}{(e^x)^2} = -e^{-x} //$$

Entonces:

$$(\sinh(x))'(x) = \frac{e^x}{2} + \left(\frac{e^{-x}}{2} \right) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Como $\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x)$ entonces

$$\therefore (\sinh(x))'(x) = \cosh(x) //$$

■ Derivada del $\cosh(x)$

El $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ entonces su derivada es:

$$(\cosh(x))'(x) = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)'(x) = \left(\frac{e^x}{2} \right)'(x) + \left(\frac{e^{-x}}{2} \right)'(x)$$

Como la derivada de $(e^x)'_m = e^x$ y $(e^{-x})'_m = -e^{-x}$ entonces

$$(\cosh(x))'(x) = \frac{e^x}{2} - \frac{e^{-x}}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Como el $\sinh = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ entonces

$$\therefore (\cosh(x))'(x) = \sinh'(x) //$$

■ Derivada de la $\tanh'(x)$

Se demuestra a partir de la definición de la derivada.

$$(\tanh(x))'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\sinh(x + \Delta x)}{\cosh(x + \Delta x)} - \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \right)$$

Sin embargo la demostración fácilmente se la puede hacer a través de la derivada de un cociente

$$(\tanh(x))'(x) = \left(\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \right)'$$

$$(\tanh(x))'(x) = \frac{(\sinh(x))'(x) \cdot \cosh(x) - (\sinh(x)) \cdot (\cosh(x))'(x)}{(\cosh(x))^2}$$

$$(\tanh(x))'(x) = \frac{\cosh(x) \cdot \cosh(x) - \sinh(x) \cdot \sinh(x)}{(\cosh(x))^2}$$

$$(\tanh(x))'(x) = \frac{(\cosh(x))^2 - (\sinh(x))^2}{(\cosh(x))^2}$$

$$\text{Pero el } (\cosh(x))^2 - (\sinh(x))^2 = 1$$

→ Demostración

$$\begin{aligned} & \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 = \left(\frac{e^{2x} + 1}{2e^x} \right)^2 - \left(\frac{e^{2x} - 1}{2e^x} \right)^2 \\ &= \frac{(e^{2x} + 1)^2}{4e^{2x}} - \frac{(e^{2x} - 1)^2}{4e^{2x}} = \frac{(e^{2x} + 1)^2 - (e^{2x} - 1)^2}{4e^{2x}} \\ &= \frac{(e^{4x} + 2e^{2x} + 1) - (e^{4x} - 2e^{2x} + 1)}{4e^{2x}} \\ &= \frac{e^{4x} + 2e^{2x} + 1 - e^{4x} + 2e^{2x} - 1}{4e^{2x}} \\ &= \frac{4e^{2x}}{4e^{2x}} = 1 // \end{aligned}$$

$$(\tanh(x))'(x) = \frac{1}{(\cosh(x))^2}$$

$$\therefore (\tanh(x))'(x) = \frac{1}{1} \cdot (\operatorname{sech}(x))^2 = (\operatorname{sech}(x))^2 //$$

■ Derivada de $\operatorname{csch}(x)$

Se emplea la derivada de una función compuesta o la regla de la cadena

$$(\operatorname{csch}(x)) = (\sinh(x))^{-1}$$

$$\Rightarrow (\operatorname{csch}(x))'(x) = ((\sinh(x))^{-1})'_{(\sinh(x))} \cdot (\sinh(x))'(x)$$

$$(\operatorname{csch}(x))'(x) = -(\sinh(x))^{-2} \cdot \cosh(x)$$

$$(\operatorname{csch}(x))'(x) = -\frac{1}{\sinh(x)} \cdot \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}$$

$$\therefore (\operatorname{csch}(x))'(x) = -\operatorname{csch}(x) \cdot \coth(x) //$$

■ Derivada de $\operatorname{sech}(x)$

$$(\operatorname{sech}(x))'(x) = (\cosh(x)^{-1})'_{(\cosh(x))} \cdot (\cosh(x))'(x)$$

$$(\operatorname{sech}(x))'(x) = -(\cosh(x))^{-2} \cdot \sinh(x)$$

$$(\operatorname{sech}(x))'(x) = -\frac{1}{\cosh(x)} \cdot \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$

$$\therefore (\operatorname{sech}(x))'(x) = -\operatorname{sech}(x) \cdot \tanh(x) //$$

■ Derivada de la $\operatorname{ctgh}(x)$

La $\operatorname{ctgh}(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}$ por lo tanto

$$(\operatorname{ctgh}(x))'(x) = \left(\frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} \right)'_{(x)}$$

De este modo se demuestra por la derivada de un cociente

$$(\operatorname{ctgh}(x))'(x) = \frac{(\cosh(x))' \cdot \sinh(x) - \cosh(x) \cdot (\sinh(x))'}{(\sinh(x))^2}$$

$$(\operatorname{ctgh}(x))'(x) = \frac{\sinh(x) \cdot \sinh(x) - \cosh(x) \cdot \cosh(x)}{(\sinh(x))^2}$$

$$(\operatorname{ctgh}(x))'(x) = \frac{\sinh^2(x) - \cosh^2(x)}{\sinh^2(x)}$$

$$\text{Como } \sinh^2(x) - \cosh^2(x) = (\cosh^2(x) - \sinh^2(x)) = -1$$

$$(\operatorname{ctgh}(x))'(x) = \frac{-1}{\sinh^2(x)}$$

$$\therefore (\operatorname{ctgh}(x))'(x) = -\operatorname{csch}^2(x) //$$

■ Derivada de las funciones Trigonometricas Inversas

■ Derivada del arco seno (arcsen)

Sea $y = f(x) = \text{sen}(x)$ ssi $x = \text{arcsen}(y)$ $\forall x \in$

$$(\text{arcsen}(y))'_{|y|} = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{(\text{sen}(x))'_{|x|}} = \frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{\cos(\text{arcsen}(y))}$$

$$(\text{arcsen } y)'_{|y|} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, \quad |y| < 1$$

- Demostración que $\cos(\text{arcsen } y) = \sqrt{1-y^2}$

$$\text{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

$$|\cos(x)| = \sqrt{1 - \text{sen}^2(x)}$$

Debido a la paridad del coseno

$$\cos(x) = \sqrt{1 - (\text{sen}(x))^2}$$

Como $x = \text{arcsen } y$

$$\cos(\text{arcsen } y) = \sqrt{1 - (\text{sen}(\text{arcsen } y))^2}$$

Puesto que $x = \text{arcsen } y$

$$\text{sen}(x) = \text{sen}(\text{arcsen } y)$$

$$y, \text{sen}(x) = y = \text{sen}(\text{arcsen } y)$$

Entonces se demuestra que

$$\cos(\text{arcsen } y) = \sqrt{1 - y^2}$$

Cambiando la notación tenemos que

$$(\text{arcsen } y)'_{|y|} \longleftrightarrow (\text{arcsen}(x))'_{|x|}$$

$$\therefore (\text{arcsen}(x))'_{|x|} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1$$

■ Derivada del arco coseno

Sea $y = f(x) = \cos(x)$ ssi $x = \arccos y$

$$(\arccos(y))'_{|y|} = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{(\cos(x))'_{|x|}} = \frac{-1}{\text{sen}(x)} = \frac{-1}{\text{sen}(\arccos y)}$$

$$\text{Como } |\text{sen}(x)| = |\text{sen}(-x)| = |-\text{sen}(x)| = \text{sen}(x)$$

$$\text{sen}(x) = \sqrt{1 - (\cos(x))^2}$$

Como $x = \arccos y$

$$\text{sen}(\arccos y) = \sqrt{1 - (\cos(\arccos y))^2}$$

Puesto que

$$(x) = \arccos y$$

$$\cos(x) = \cos(\arccos y)$$

y Además

$$\cos(x) = y$$

$$\therefore y = \cos(\arccos y)$$

De modo que

$$(\arccos(y))'_{|y} = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}, \quad |y| < 1$$

Cambiando la notación tenemos que:

$$(\arccos(y))'_{|y} \longleftrightarrow (\arccos(x))'_{|x}$$

$$\therefore (\arccos(x))'_{|x} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1$$

■ Derivada del Arco Tangente

Sea $y = f(x) = \tan(x)$ ssi $x = \arctg(y)$

$$\begin{aligned} (\arctg(y))'_{|y} &= \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{(\tan(x))'_{|x}} = \frac{1}{\sec^2(x)} \\ &= \frac{1}{1 + \tan^2(x)} = \frac{1}{1 + (\tan(x))^2} = \frac{1}{1 + [\tan(\arctg(y))]^2} \\ &= \frac{1}{1 + y^2}, \quad y \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Cambiando la notación tenemos que:

$$(\arctg(y))'_{|y} \longleftrightarrow (\arctg(x))'_{|x}$$

$$\therefore (\arctg(x))'_{|x} = \frac{1}{1 + x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

■ Derivada del arco secante

Se usa la propiedad: $\operatorname{arcsec} x = \arccos \frac{1}{x}$ válida para $|x| \geq 1$

• Demostración de la propiedad

$$\operatorname{arcsec}(x) = \arccos\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$1) \cos(y) = x \rightarrow y = \arccos(x)$$

$$2) \sec(y) = \frac{1}{\cos(y)}, \text{ como } \cos(y) = x \text{ entonces}$$
$$= \frac{1}{x}$$

$$3) y = \operatorname{arcsec}\left(\frac{1}{x}\right) = \operatorname{arcsec}\left(\frac{1}{\cos(y)}\right) = \operatorname{arcsec}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\text{Como } y = \operatorname{arcsec}\left(\frac{1}{x}\right) = \arccos(x)$$

$$\text{Si } \frac{1}{x} = z \text{ entonces}$$

$$y = \operatorname{arcsec}(z) = \arccos\left(\frac{1}{z}\right)$$

La propiedad se cumple para cualquier variable

$$\Rightarrow (\operatorname{arcsec} x)' = \left(\arccos\left(\frac{1}{x}\right)\right)' = \frac{-1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x^2 \cdot \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^2}}}$$
$$\therefore (\operatorname{arcsec}(x))'_{|x} = \frac{1}{|x|^2 \cdot \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{|x| \sqrt{x^2 - 1}}, \quad |x| \geq 1 //$$

■ Derivada del arco cosecante

Como $\operatorname{arccsc} x = \arcsin \frac{1}{x}$ cuando $|x| \geq 1$ entonces,

$$(\operatorname{arccsc} x)'_{(x)} = \left(\arcsin \frac{1}{x} \right)'_{(x)}$$

$$(\operatorname{arccsc} x)'_{(x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} \left(-\frac{1}{x^2} \right)$$

$$(\operatorname{arccsc} x)'_{(x)} = \frac{-1}{x^2 \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^2}}} = \frac{-1}{|x|^2 \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{|x|}}$$

$$(\operatorname{arccsc} x)'_{(x)} = \frac{-1}{|x| \sqrt{x^2 - 1}} \quad \text{si } |x| > 1 //$$

■ Derivada de la arco cotangente

Como $\operatorname{arccot} x = \arctan \left(\frac{1}{x} \right)$ entonces,

$$(\operatorname{arccot} x)'_{(x)} = \left(\frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x} \right)^2} \right) \left(-\frac{1}{x^2} \right)$$

$$(\operatorname{arccot} x)'_{(x)} = \frac{-1}{x^2 \left(\frac{x^2 + 1}{x^2} \right)}$$

$$(\operatorname{arccot} x)'_{(x)} = \frac{-1}{1 + x^2} //$$

CALCULUS

A. LLANGANATE

